標数2のEnriques曲面について

AUTHOR(S):

桂, 利行

CITATION:

桂, 利行. 標数2のEnriques曲面について. 代数幾何学シンポジューム記録 1981, 1981: 135-152

ISSUE DATE:

1981

URL:

http://hdl.handle.net/2433/212603

代数幾何学シンポジウム記録
1981年度　pp.135-152

標数2のEnriques曲面について

横浜市大　文理　桂　利行

§0. 序

近年，標数pの代数曲面の分類理論が完成し，標数pの代数曲面もとらえやすいものになってきた（Bombieri-Mumford[7]）。またcrystalline cohomologyの理論が整備されて，各種のcohomology理論との関係があきらかになり（Illusie[9]），標数pの世界も理解しやすいものになろうとしている。こうした状況の中で，現在，単有理曲面の周辺を研究している人々がふえつつあるように思われる。本稿では，標題にとらわれず，単有理曲面について　現在　どのぐらいのことが知られているかをまとめてみたいと思う。その多くは，塩田，宮西両先生の論文によるものである。

§1. 単有理曲面の一般的性質

Xを　標数p（$p>0$）の代数的閉体k上定義

された非特異完備代数曲面とする。

Def. 1. 射影平面$\mathbb{P}^2$からXへの generically surjective な有理写像fが存在するとき，Xは単有理曲面であるといわれる。fとして純非分離的な有理写像がとれるとき，Xは純非分離型の単有理曲面であるといわれる。fとして次数pの純非分離的有理写像がとれるとき，Xは Zariski 曲面であるといわれる。

Def. 2. Picard 数$\rho(X)$ = 第2 Betti 数$B_2(X)$であるとき，Xは supersingular であるといわれる。

Xの構造層を$\mathcal{O}_X$と書き，Fをその上に作用する Frobenius 写像とする。すなわち，

(1.1)
$$\begin{array}{cccc} F: & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \\ & \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ & g & \longmapsto & g^p \end{array}$$

とする。

Def. 3. $F^*: H^i(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X)$ $(i=1,2)$が巾零であるとき，Xは F-supersingular であるという。

$g(X)$をXの Albanese 多様体の次元，$\pi_1(X)$をXの代数的基本群とするとき，次が成立する。

Th.1.1. X を単有理曲面とする。

i) $g(X) = 0$.

ii) X は supersingular (Shioda [21]).

iii) X は F-supersingular (Crew [8] + Katsura [10]).

iv) $\pi_1(X)$ は有限群 (Serre [20]).

v) $\pi_1(X)$ の位数は p と素 (Crew [8], Katsura [10]).

このことと分類理論を組み合わせると，単有理曲面の存在の可能性について次のことがいえる (Shioda [23])。

小平次元	曲面	単有理曲面の存在の可能性
$\kappa = -\infty$	rational surface	○
	ruled surface ($g(X) \geq 1$)	×
$\kappa = 0$	abelian surface	×
	K3 surface	○
	Enriques surface	○
	hyperelliptic surface	×
	(quasi-hyperelliptic surface)	×
$\kappa = 1$	elliptic surface	○
	(quasi-elliptic surface)	○
$\kappa = 2$	general type	○

○の部分は実際に単有理曲面の存在が知られている。以下，どのような例が知られているかを示していく。

§2、単有理曲面の例.

体 k の標数 p は正であるとする。

1) Zariski の例.

1958年，Zariski は次のような $\mathbb{P}^3$ の中の単有理超曲面を考えた。

$$(2.1) \qquad x_0^p + x_1^{p+1} + x_2^{p+1} - (x_1^2 + x_2^2)/2 = 0 \quad (p \neq 2)$$

彼は，この曲面の非特異モデルの幾何学的種数 p_g が正であることを示すことによって，有理的でない単有理曲面が存在することを初めて示した。

2) Fermat 曲面

$\mathbb{P}^3(k)$ の中で次のような曲面を考える。

$$(2.2) \qquad X_m : x_0^m + x_1^m + x_2^m + x_3^m = 0 .$$

ただし，$p \nmid m$ で，$m \geqq 4$ とする。

この曲面は，$m = 4$ のとき K3 曲面で，$m \geqq 5$ のとき一般型曲面であることは周知の事実である。

Th. 2.1. (Shioda-Katsura [24]). 次の3条件は同値である。

i) X_m は単有理曲面.

ii) X_m は supersingular .

iii) ある自然数 ν があって, $p^\nu \equiv -1 \pmod m$ となる。

3) パラメータを持つ超曲面

$q = p^\nu$ $(\nu \geqq 1)$ とおき, 次のような $\mathbb{P}^3(k)$ の中の超曲面を考える。

(2.3) $$X_{f,g} : x_1^q x_3 + x_2^q x_0 + x_1 f(x_3, x_0) + x_2 g(x_3, x_0) = 0$$

ただし, f, g は共通因子のない x_0, x_3 に関する次数 q の binary form である。

Th 2.2 (Shioda [23]). $X_{f,g}$ は単有理曲面である。$(p, \nu) = (2, 1)$ 又は $(3, 1)$ のとき, 有理曲面又は K3 曲面であるが, 他の場合は一般型曲面になる。

4) 底変換型の楕円曲面

Def. 1. $\pi : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を楕円曲面とする。非特異完備代数曲線 C と正則写像 $f : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ が存在して, fiber product $S \times_{\mathbb{P}^1} C$ が $\mathbb{P}^2$ と双有理的になるとき, S を底変換型の単有理楕円曲面

という。

楕円曲面 $X \longrightarrow C$ が単有理的なら，$g(X)=0$ だから，必然的に C は有理曲線になる。

ここで，$p \geqslant 5$ として，次のような t をパラメータとする $\mathbb{P}^1$ 上の楕円曲面の Weierstraß form を考える。

$$\text{(I)} \quad y^2 = 4x^3 - t^3(t-1)^3(t-\alpha)^3 x,$$

$$\text{(II)} \quad y^2 = 4x^3 - t^5(t-1)^5(t-\alpha)^5(t-\beta)^5(t-\gamma)^5.$$

ただし，α，β，γ は k の任意の元である。これらがすべて有理曲面ではないことは，楕円曲面の一般論から容易にわかる。

Th. 2.3 (Katsura [11]). $p \geqslant 5$ とする。切断をもつ底変換型の有理的でない単有理楕円曲面は次のいずれかになる。

i) $p \equiv 1 \mod 12 \implies$ 存在しない。

ii) $p \equiv 5 \mod 12 \implies$ Class (II) の楕円曲面。

iii) $p \equiv 7 \mod 12 \implies$ Class (I) の楕円曲面。

iv) $p \equiv 11 \mod 12 \implies$ Class (I)(II) の楕円曲面。

ここで，Class (II) を次のように制限する。

$$\text{(II')} \quad y^2 = 4x^3 - t^4(t-1)^5(t-\alpha)^5.$$

(I) (II') から得られる相対的極小な非特異楕円曲面を S とするとき次が成立する。

Th. 2.4 (Katsura [11]). 次の 3 条件は同値である。

i) S は単有理曲面である。

ii) S は supersingular である。

iii) S は底変換型の単有理楕円曲面である。

Remark. Class (I) において, $\alpha = 0, 1$ なら K3 曲面, その他は $\kappa = 1$ の楕円曲面, Class (II) において, $\{\alpha=\beta=\gamma=0\}$, $\{\alpha=\beta=\gamma=1\}$, $\{\alpha=\beta=0, \gamma=1\}$, $\{\alpha=\beta=1, \gamma=0\}$, $\{\alpha=1, \beta=\gamma=0\}$, $\{\alpha=0, \beta=\gamma=1\}$, $\{\alpha=\gamma=0, \beta=1\}$, $\{\alpha=\gamma=1, \beta=0\}$ は K3 曲面, その他は $\kappa=1$ の楕円曲面である。

$p=3$ のときには, 次のようになる。

Th. 2.5 (Katsura [11]). $p=3$ とする。切断をもつ底変換型の有理的でない単有理楕円曲面の Weierstraß normal form は次のいずれかになる。

i) $$y^2 = 4x^3 + 2t^5(t-1)^3x + t^4(t-1)^4(a + bt + ct^3 + dt^4),$$
ただし, $(a, b) \neq (0, 0)$.

ii) $$y^2 = 4x^3 + 2t^3(t-1)^3(t+1)^2x + t^3(t-1)^3\{a + bt + (a-b)t^3 + ct^4 + (c-b)t^5 + dt^6\}.$$

iii) $$y^2 = 4x^3 + 2t^3(t+1)^3(t-1)^3(t-\alpha)^3 x + t^4(t-1)^4(t+1)^4(t-\alpha)^4(a+bt+ct^2) + dt^8(t-1)^3(t+1)^3(t-\alpha)^3 \qquad (\alpha \neq -1, 0, 1).$$

ただし，a, b, c, α は k の元である。

ここで，i) ii) は K3 曲面，iii) は $\kappa = 1$ の楕円曲面である。

5) 底変換型でない単有理楕円曲面.

$p \neq 3$ として，μ をパラメータとする楕円曲線の族

(2.4) $$x^3 + y^3 + z^3 - 3\mu xyz = 0$$

から得られる相対的極小な非特異楕円曲面を $\pi: S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ とする。S は有理曲面である。

$q = p^\nu$ (ν: 自然数) として，q 乗写像 $F: t \longmapsto \mu = t^q$ を考え，上記楕円曲面を底変換してできた楕円曲面を $\pi_\nu: S_\nu \longrightarrow \mathbb{P}^1$ とする。

Th. 2.6 (Shioda [23]). $\nu \geq 2$ とする。楕円曲面 $\pi_\nu: S_\nu \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は $\kappa = 1$ の単有理楕円曲面である。

この楕円曲面が底変換型でないことは，singular fiber の構造をみれば容易にわかる。

6) A^1 の $k(t)$-form から得られる単有理曲面.

Miyanishi [15] [16] [17] に以下のような単有理曲面が調べられている。まず, $p=2$ 又は 3 とし, 準楕円曲面 $\pi: S \longrightarrow C$ を考える。

Th 2.7. 準楕円曲面 $\pi: S \longrightarrow C$ に対し, 次の2条件は同値である。

i) S は単有理曲面.

ii) C は有理曲線.

切断を持つような $\mathbb{P}^1$ 上の準楕円曲面は

$p=3$ なら $y^2 = x^3 + \gamma(t)$, $\gamma(t) \in k(t) \setminus k(t)^3$

$p=2$ なら $y^2 = x^3 + \beta(t)x + \gamma(t)$, $\beta(t), \gamma(t) \in k(t)$, $\beta(t) \notin k(t)^2$ 又は $\gamma(t) \notin k(t)^2$

によって与えられるが, これらの曲面の分類論的性質も Miyanishi [15] で調べられている。そこには, 有理曲面, K3曲面, $\kappa=1$ の準楕円曲面があらわれる。

また, $p>0$ として, 一般に A^1 の $k(t)$-form が与えられていれば, generic fiber がそれと双有理的な $\mathbb{P}^1$ 上の false ruled surface が得られるが, その曲面も単有理曲面である。様々な場合に, これらの分類論的性質も調べられている (Miyanishi [16] [17])。

7) K3曲面

K3曲面の単有理性を調べるにあたって目標となるのは次の予想であろう。

Conjecture (Shioda) K3曲面 X について、X が単有理曲面であることと、X が supersingular であることは同値である。

$\Rightarrow$ は一般に正しい (§1, Th 1.1, ii))。

$\Leftarrow$ については、特別な場合には次のような著しい結果がある。

Th. 2.8 (Rudakov - Shafarevich [19]). 標数が 2 のときは上記 conjecture は正しい。

$p \neq 2$ とする。A をアーベル曲面、ι をその inversion とする。A/ι の極小非特異モデルを $Km(A)$ と書き、Kummer 曲面という。これが K3 曲面であることは周知の事実である。

Th. 2.9 (Shioda [23]) Kummer 曲面 $Km(A)$ に対して、次の3条件は同値である。

i) $Km(A)$ は単有理曲面.

ii) $Km(A)$ は supersingular .

iii) A は supersingular .

つまり，この場合にも上記 conjecture は成立している。

8) $p \neq 2$ の Enriques 曲面.

$\mathbb{P}^3(k)$ の中で，次のような超曲面を考える。

$$(2.5)\qquad S_{a,b} : (x_1x_2x_3)^2 + (x_1x_2x_4)^2 + a(x_1x_3x_4)^2 + b(x_2x_3x_4)^2 - x_1x_2x_3x_4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+abx_4^2) = 0$$

(ただし，$a \neq 0, 1$，$b \neq 0, 1$)

この極小非特異モデルは Enriques 曲面である。

さらに，

$$(2.6)\qquad \Phi(\lambda) = \sum_{i=0}^{(p-1)/2} \binom{(p-1)/2}{i}^2 \lambda^i$$ とおく.

Th. 2.10 (Shioda [23]) $p > 2$ とする。$S_{a,b}$ が単有理曲面であることと，$\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ であることは同値である。

9) $p = 2$ の Enriques 曲面

標数 2 の Enriques 曲面 X ($K = 0$, $B_2 = 10$ の極小な曲面) は，Bombieri - Mumford によれば次のように 3 種に分かれる。X の標準束を K と書く。

i) classical

$K \not\sim 0$, $K^{\otimes 2} \sim 0$ で，$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

ii) supersingular in the sense of Bombieri - Mumford (BM -

supersingular と略す)。

$K\sim 0$, $H^1(X,\mathcal{O}_X)\cong k$ で, F^* は $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ 上零写像.

iii) singular.

$K\sim 0$, $H^1(X,\mathcal{O}_X)\cong k$ で, F^* は $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ 上 bijective.

いずれの場合にも, X は次数2の被覆 $\widetilde{X}$ (非特異とはかぎらない)をもつ(Bombieri-Mumford[7]):

$$\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X.$$

π はそれぞれ

i) ii) 次数2の純非分離的写像.

iii) 次数2の étale 写像.

である. このとき, 次が成立する。

Th 2.11 (Blass[4]). $p=2$, X: Enriques 曲面とする。次の2条件は同値である。

i) X は単有理曲面.

ii) X は classical 又は BM-supersingular.

i) ⇒ ii) を示すには §1, Th 1.1 v) を用いる。

ii) ⇒ i) を示すにあたり, Blass は Class i) ii) の Enriques 曲面が次のように分かれることを示した。

i) a_1) X: classical, $\widetilde{X}$ の極小非特異モデルが K3 曲面.

b_1) X: classical, $\widetilde{X}$ が $\mathbb{P}^2$ に双有理同型。

ii) a_2) X : BM-supersingular, $\tilde{X}$ の極小非特異モデルがK3曲面。

b_2) X : BM-supersingular, $\tilde{X}$ が $\mathbb{P}^2$ に双有理同型。

b_1) b_2) のときには, X が単有理曲であることは自明である。 a_1) a_2) のときには, Rudakov-Shafarevich の定理2.8. から $\tilde{X}$ が単有理曲面になり, 従って X も単有理曲面になる。

Bombieri-Mumford [7] によれば, 標数2の Enriques 曲面は, 楕円曲面又は準楕円曲面の構造をもつ。任意の1つを

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

とすると, 次のことが成立する。

Th 2.12. (Katsura [12]). a_1) a_2) は Zariski 曲面ではない。b_1) b_2) は底変換型の Zariski 楕円曲面である。

これを使えば次の系を得る。

Cor. 2.13. a_1) a_2) 及び iii) に属する Enriques 曲面は, 準楕円曲面の構造を持たない。

標数3の Enriques 曲面が準楕円曲面の構造を持たないことは, Lang [13] に示されているが, これも, 単有理曲面の考え方を使って標数2の場合と同様に示しうる。

§3. 補足

A) 不変量 $i(X)$, $s(X)$.

単有理曲面 X に対して，次のような不変量を導入する。

Def. 1.
$$p^{i(X)} = \operatorname*{Min}_{\substack{f : \mathbb{P}^2 \to X \\ \text{generically surjective} \\ \text{rational map}}} \{\text{inseparable degree of } f\},$$

$$s(X) = \operatorname*{Min}_{\substack{f : \mathbb{P}^2 \to X \\ \text{generically surjective} \\ \text{rational map}}} \{\text{separable degree of } f\}.$$

Enriques - Castelnuovo の有理性判定条件から容易にわかるように

(3.1) $$i(X) = 0 \iff X : \text{有理曲面},$$

また，定義から

(3.2) $$i(X) = s(X) = 1 \iff X : \text{Zariski 曲面},$$

となる。これ以外の場合に，$i(X)$, $s(X)$ を実際に計算することは，けっこうむつかしい問題である。

$s(X) > 1$ となる例としては，$\pi_1(X) \neq \{1\}$ となる単有理曲面を考えればよい。例えば，$\mathbb{P}^3$ の中で，

(3.3) $$X_5 : x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0$$

で定義される曲面 X_5 の自己同型

(3.4) $\quad \sigma : x_i \longmapsto \zeta^i x_i \quad$ ($i=0,1,2,3$, ζは1の原始5乗根)

での商多様体を $X = X_5/\langle\sigma\rangle$ とすれば，X は $p \neq 5$ のとき有理的ではない単有理曲面(Godeaux曲面)で $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ となる(Shioda [22])。このとき，$\mathbb{P}^2 \longrightarrow X$ なる generically surjective な有理写像は，すべて，$\mathbb{P}^2 \longrightarrow X_5 \longrightarrow X$ と分解するから(Serre [20])，$s(X) > 1$ がわかる。しかし，次のことは知られていない。

Problem (Shioda). $\pi_1(X) = \{1\}$, $s(X) > 1$ となる単有理曲面はあるか。

$i(X)$ については，次のことがわかる。

Prop. 3.1 (Katsura [12]). $p = 2$ とする。§2, 9) に於て，α_1) α_2) に属する Enriques 曲面 X に対しては $i(X) = 2$ である。

この曲面以外に $i(X) > 1$ であることが実際に計算できている単有理曲面の例はないようである (Blass [5])．

B) 正則 1-形式．

正則1-形式を持つような単有理曲面は存在

する。それを示すために，$H^1(X,\mathcal{O}_X)$ が零ではないような単有理曲面の存在を調べる。その存在は，次の2例しか知られていない。

1)　標数2の BM-supersingular Enriques 曲面

2) (Lang [13])　標数3として，次の式で定義される $\mathbb{P}^1$ 上の準楕円曲面：

(3.5) $$t^2(t-1)^2 z + t^2(t-1)^2 + x^3 + tz^3 = 0,$$

ただし，t が base curve の変数である。

§1, Th 1.1 iii) より，Frobenius 写像 F^* は $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ の上に巾零に作用する。従って，$\alpha \in H^1(X,\mathcal{O}_X)$，$\alpha \neq 0$ で，$\alpha^p = 0$ となるものが存在する。X の affine 開被覆 $\{U_i\}$ をとる。Čech cohomology で $\alpha = \{f_{ij}\}$ と書くと，

(3.6) $$f_{ij}^{\,p} = f_i - f_j \quad , \quad {}^{\exists}f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$$

となる。故に，

(3.7) $$df_i = df_j \quad \text{on} \quad U_i \cap U_j$$

となるから，$\{df_i\}$ は X 上の零ではない正則1-形式となる。これら以外に零でない正則1-形式を持つような単有理曲面は知られていないようである。

c) その他の例

§2にあげた準有理曲面の例以外に，多くのZariski曲面がBlass[3]で，微分によって定義される一般型のZariski曲面の例がMiyanishi-Russell[18]で調べられている。

References

[1] A. Artin, Supersingular K3 surfaces, (代数幾何学の研究) 数理科学講究録 183 (1973), 8-17.

[2] A. Artin, Supersingular K3 surfaces, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4^e serie 7 (1974), 543-568.

[3] P.Blass, Zariski surfaces, Thesis, University of Michigan (1977).

[4] P. Blass, Unirationality of Enriques surfaces in characteristic two, preprint.

[5] P. Blass, Some geometric applications of a differential equation in characteristic p > 0 to the theory of algebraic surfaces, preprint.

[6] P Blass and M. Levine, Families of Zariski surfaces, preprint.

[7] E. Bombieri and D. Mumford, Enriques' classification of surfaces in char. p, III, Invent. Math. 36 (1976), 197-232.

[8] R. M. Crew, Slope characteristics in crystalline cohomology, Thesis, Princeton University (1981).

[9] L.Illusie, Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4^e serie 12 (1979), 501-661.

[10] T. Katsura, Surfaces unirationnelles en caractéristique p, C.R. Acad. Sci. Paris 288 (1979), 45-47.

[11] T. Katsura, Unirational elliptic surfaces in characteristic p, Tôhoku Math. J. 33 (1981), 521-553.

[12] T. Katsura, A note on Enriques' surfaces in characteristic 2, preprint.

[13] W. Lang, Quasi-elliptic surfaces in characteristic three, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4^e serie 12 (1979), 473-500.

[14] M. Miyanishi, Unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic 3, Osaka J. Math. 13 (1976), 513-522.

[15] M. Miyanishi, Unirational quasi-elliptic surfaces, Japan. J. Math. 3 (1977), 395-416.

[16] M. Miyanishi, Lectures on curves on rational and unirational surfaces, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1978).

[17] M. Miyanishi, 多項式環とその周辺，数学, 31 (1979), 97-109.

[18] M. Miyanishi and P. Russell, Purely inseparable coverings of exponent one of the affine plane, preprint.

[19] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, Supersingular K3 surfaces over fields of characteristic 2, Math. USSR-Izv. 13-1 (1979), 147-165.

[20] J. P. Serre, On the fundamental group of a unirational variety, J. London Math. Soc. 14 (1974), 233-236.

[21] T. Shioda, An example of unirational surfaces in characteristic p, Math. Ann. 211 (1974), 233-236.

[22] T. Shioda, On unirationality of supersingular surfaces, Math. Ann. 225 (1977), 155-159.

[23] T. Shioda, Some results on unirationality of algebraic surfaces, Math. Ann. 230 (1977), 153-168.

[24] T. Shioda and T. Katsura, On Fermat varieties, Tôhoku Math. J. 31 (1979), 97-115.

[25] O. Zariski, On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface, Illinois J. Math. 2 (1958), 303-315.